

## VẤN ĐỀ 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN

### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Bài toán 1.1** Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

- a) Rút gọn biểu thức  $P$   
b) Tìm  $x$  khi  $P = 0$ .

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nam Định năm 2011)

➤ **Lời giải.** a) Với  $x \geq 0, x \neq 1$  ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}\left[(\sqrt{x})^3-1\right]}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x} \\ &= x - \sqrt{x} - \sqrt{x} = x - 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Vậy với  $x \geq 0, x \neq 1$  thì  $P = x - 2\sqrt{x}$ .

b) Với  $x \geq 0, x \neq 1$  ta có

$$P = 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện  $x \geq 0, x \neq 1$  ta thấy hai giá trị này đều thỏa mãn.

Vậy với  $P = 0$  thì  $x = 0, x = 4$ .

### NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý KHI GIẢI TOÁN

*Kĩ năng cũng như cách giải chung cho dạng toán như câu a*

- Đặt điều kiện thích hợp, nếu đề bài đã nêu điều kiện xác định thì ta vẫn phải chỉ ra trong bài làm của mình như lời giải nêu trên.
- Đa phần các bài toán dạng này, chúng ta thường quy đồng mẫu, xong rồi tính toán rút gọn tử thức và sau đó xem tử thức và mẫu thức có thừa số chung nào hay không để rút gọn tiếp.
- Trong bài toán trên thì đã không quy đồng mẫu mà đơn giản biểu thức luôn.
- Khi làm ra kết quả cuối cùng, ta kết luận giống như trên.

*Đối với dạng toán như câu b*

- Cách làm trên là điển hình, không bị trừ điểm.
- Ngoài câu hỏi tìm  $x$  như trên thì người ta có thể hỏi: cho  $x$  là một hằng số nào đó bất rút gọn  $P$ , giải bất phương trình, tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất, tìm  $x$  để  $P$  có

giá trị nguyên, chứng minh một bất đẳng thức. Nhưng thường thì người ta sẽ hỏi như sau: tìm  $x$  để  $P$  có giá trị nào đó (như ví dụ nêu trên), cho  $x$  nhận một giá trị cụ thể để tính  $P$ .

### MỘT SỐ CÂU HỎI MỞ CHO BÀI TOÁN

- **Câu hỏi mở 1.** Rút gọn  $P$  khi  $x = 3 + 2\sqrt{2}$ .

Ta có  $x = 3 + 2\sqrt{2} = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2$

Khi đó, với  $x \geq 0, x \neq 1$  thì  $\sqrt{x} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$

Do đó  $P = x - 2\sqrt{x} = 3 + 2\sqrt{2} - 2(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = 1$ .

Vậy với  $x = 3 + 2\sqrt{2}$  thì  $P = 1$ .

- **Câu hỏi mở 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

Với  $x \geq 0, x \neq 1$  ta có  $P = x - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$

Vì  $x \neq 1$  nên  $(\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 - 1 > -1$

Vậy với  $x \geq 0, x \neq 1$  thì  $P$  không có giá trị nhỏ nhất.

Trong loại câu hỏi này, ta cần chú ý đến điều kiện xác định. Chẳng hạn với điều kiện  $x \geq 4$  ta rút gọn được  $P = x - \sqrt{x}$  thì ta sẽ không làm như trên mà sẽ làm như sau

Với  $x \geq 4$  ta có  $P = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x}$

Vì  $x \geq 4 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} > 0, \sqrt{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x} \geq 0 + 2 = 2$

Vậy min  $P = 2$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = 4$  (thỏa mãn điều kiện).

- **Câu hỏi mở 3.** Chứng minh rằng  $P > -1$  thì ta làm như trên nhưng kết luận là  $P > -1$ .
- **Câu hỏi mở 4.** Tìm số nguyên  $x$  để  $P$  có giá trị nguyên.

Ví dụ trên, ta có  $P = x - 2\sqrt{x}$ , thì thường đề bài sẽ không hỏi đến nghiệm nguyên. Chẳng hạn với điều kiện  $x \geq 1$  ta rút gọn được  $P = \frac{3x}{x+1}$ , đề bài hỏi: tìm số nguyên  $x$  để  $P$  nhận giá trị nguyên thì ta làm như sau

Với  $x \geq 1$ , ta có  $P = \frac{3x}{x+1} = \frac{3(x+1) - 3}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$

Từ đó với  $x$  là số nguyên,  $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 - \frac{3}{x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \mid (x+1)$

Tương đương với  $x+1$  là ước của 3, mà ước của 3 là  $\{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow (x+1) \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Mà  $x \geq 1 \Rightarrow x+1 \geq 2 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$  (thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: vậy  $x = 2$  là giá trị cần tìm.

Ta xét thêm một bài toán nữa là một câu trong đề chung chuyên Lê Hồng Phong Nam Định năm 2011.

**Bài toán 1.2** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{3\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{x+\sqrt{x}}$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

- a) Rút gọn biểu thức B  
b) Tìm x để  $2P - x = 3$ .

(Đề chung Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định năm 2011)

➤ **Lời giải.** a) Với  $x > 0, x \neq 1$  ta có

$$\begin{aligned} B &= (x + \sqrt{x}) \left( \frac{3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{3\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Vậy với  $x > 0, x \neq 1$  thì  $P = 2\sqrt{x}$ .

b) Với  $x > 0, x \neq 1$  và  $P = 2\sqrt{x}$  ta có

$$\begin{aligned} 2P - x = 3 &\Leftrightarrow 4\sqrt{x} - x = 3 \\ &\Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - 3(\sqrt{x}-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=0 \\ \sqrt{x}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện nêu trên thì chỉ có  $x = 9$  thỏa mãn bài toán.

## B. CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

**Bài 1:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$

- a) Rút gọn P.  
b) Tìm giá trị của a để  $P < 1$ .

**Bài 2:** Cho biểu thức  $P = \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$

- a) Rút gọn P.  
b) Tìm giá trị của x để  $P < 0$ .

**Bài 3:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left( 1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$

- Rút gọn  $P$ .
- Tìm các giá trị của  $x$  để  $P = \frac{6}{5}$ .

**Bài 4:** Cho biểu thức  $P = \left( 1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1} \right)$

- Rút gọn  $P$ .
- Tìm giá trị của  $a$  để  $P < 1$ .
- Tìm giá trị của  $P$  nếu  $a = 19 - 8\sqrt{3}$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{a}(1-a)^2}{1+a} : \left[ \left( \frac{1-\sqrt{a^3}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) \right]$

- Rút gọn  $P$
- Xét dấu của biểu thức  $M = a(P-0,5)$ .

**Bài 6:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} + \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} - 1 \right) : \left( 1 + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} \right)$

- Rút gọn  $P$
- Tính giá trị của  $P$  khi  $x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ .

**Bài 7:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$

- Rút gọn  $P$
- Tìm  $x$  để  $P \leq 0$

**Bài 8:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{2a+1}{\sqrt{a^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1} \right) \left( \frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$

- Rút gọn  $P$
- Xét dấu của biểu thức  $P\sqrt{1-a}$

**Bài 9:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

- Rút gọn  $P$
- Tính giá trị của  $P$  với  $x = 7 - 4\sqrt{3}$
- Tính giá trị lớn nhất của  $a$  để  $P > a$ .

**Bài 10:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$

- Rút gọn  $P$ .
- Tìm  $a$  để  $P < 7 - 4\sqrt{3}$ .

**Bài 11:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9} \right) : \left( \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - 1 \right)$

- Rút gọn  $P$
- Tìm  $x$  để  $P < \frac{1}{2}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

**Bài 12:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1 \right) : \left( \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \right)$

- Rút gọn  $P$
- Tìm giá trị của  $x$  để  $P < 1$

**Bài 13:** Cho biểu thức  $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$

- Rút gọn  $P$
- Tìm các giá trị của  $x$  để  $P = \frac{1}{2}$
- Chứng minh  $P \leq \frac{2}{3}$

**Bài 14:** Cho biểu thức  $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - m} - \frac{m^2}{4x - 4m^2}$  với  $m > 0$

- Rút gọn  $P$
- Tính  $x$  theo  $m$  để  $P = 0$ .
- Xác định các giá trị của  $m$  để  $x$  tìm được ở câu b thỏa mãn điều kiện  $x > 1$ .

**Bài 15:** Cho biểu thức  $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

- Rút gọn  $P$
- Biết  $a > 1$  hãy so sánh  $P$  với  $|P|$
- Tìm  $a$  để  $P = 2$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

**Bài 16:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} - 1 \right) : \left( \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} - \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} + 1 \right)$

- Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tính giá trị của P nếu  $a = 2 - \sqrt{3}$  và  $b = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$

**Bài 17:** Cho biểu thức  $P = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}\right)$

- Rút gọn P
- Với giá trị nào của a thì  $P = 7$
- Với giá trị nào của a thì  $P > 6$ .

**Bài 18:** Cho biểu thức  $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)$

- Rút gọn P
- Tìm các giá trị của a để  $P < 0$
- Tìm các giá trị của a để  $P = -2$

**Bài 19:** Cho biểu thức  $P = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

- Tìm điều kiện để P có nghĩa.
- Rút gọn P
- Tính giá trị của P khi  $a = 2\sqrt{3}$  và  $b = \sqrt{3}$

**Bài 20:** Cho biểu thức  $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

- Rút gọn P
- Chứng minh rằng  $P > 0$  với  $\forall x \neq 1$

**Bài 21:** Cho biểu thức  $P = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}\right)$

- Rút gọn P
- Tính  $\sqrt{P}$  khi  $x = 5 + 2\sqrt{3}$

**Bài 22:** Cho biểu thức  $P = 1 : \left(\frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4 - x} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{x}}\right) : \frac{1}{4 - 2\sqrt{x}}$

- Rút gọn P
- Tìm giá trị của x để  $P = 20$

**Bài 23:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

- Rút gọn P
- Chứng minh  $P \geq 0$

**Bài 24:** Cho  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} \right) \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} \right) : \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \right]$

- Rút gọn P
- Tính P khi  $a = 16$  và  $b = 4$

**Bài 25:** Cho biểu thức  $P = 1 + \left( \frac{2a+\sqrt{a}-1}{1-a} - \frac{2a\sqrt{a}-\sqrt{a}+a}{1-a\sqrt{a}} \right) : \frac{a-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$

- Rút gọn P
- Cho  $P = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$  tìm giá trị của a
- Chứng minh rằng  $P > \frac{2}{3}$ .

**Bài 26:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left( \frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right)$

- Rút gọn P
- Với giá trị nào của x thì  $P < 1$ .

**Bài 27:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} - \frac{3a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2a+2\sqrt{ab}+2b}$

- Rút gọn P
- Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên

**Bài 28:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$

- Rút gọn P
- Tìm giá trị của a để  $P > \frac{1}{6}$ .

**Bài 29:** Cho biểu thức  $P = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

- Rút gọn P
- Cho  $x \cdot y = 16$ . Xác định x, y để P có giá trị nhỏ nhất.



**Bài 30:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy} - 2y} - \frac{2x}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn P  
 b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để  $y = 625$  và  $P < 0,2$ .

## VẤN ĐỀ 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

➤ Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a$  khác 0, biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Hệ thức Viet đối với phương trình bậc hai

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

- Nếu  $ac < 0$  thì PT có 2 nghiệm phân biệt.
- PT có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ .
- PT có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \Delta = 0$ .
- PT có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0$ .

- PT có 2 nghiệm phân biệt trái dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases}$

- PT có 2 nghiệm dương phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

- PT có 2 nghiệm âm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

➤ Từ những tính chất quan trọng nêu trên, ta sẽ giải được một dạng toán về PT trùng phương.

Xét phương trình  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  (i) với  $a$  khác 0. Đặt  $t = x^2 \geq 0$ , ta có

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (ii)$$

- PT (i) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (ii) có 2 nghiệm dương phân biệt.
- PT (i) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (ii) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0.
- PT (i) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (ii) có duy nhất một nghiệm dương.
- PT (i) có 1 nghiệm khi và chỉ khi (ii) có duy nhất một nghiệm là 0.

Sau đây chúng ta sẽ xét một số bài toán thường gặp mang tính chất điển hình.



**Bài toán 2.1** Cho phương trình  $(m-1)x^2 - 4mx + 4m + 1 = 0$ . (1)

- Hãy giải phương trình trên khi  $m = 2$
- Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm.
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt. Khi đó hãy tìm một biểu thức liên hệ độc lập giữa các nghiệm của phương trình.
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 17$ .
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu.
- Tìm  $m$  khi  $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{7}$ , với  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình.
- Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn nghiệm này bằng 2 lần nghiệm kia.

➤ **Lời giải.** a) Khi  $m = 2$  thay vào (1) ta được  $x^2 - 8x + 9 = 0$  (2)

PT này có  $\Delta' = 16 - 9 = 7 > 0$

Khi đó (2) có hai nghiệm  $x_1 = 4 - \sqrt{7}; x_2 = 4 + \sqrt{7}$

Vậy với  $m = 2$  thì PT đã cho có tập nghiệm là  $S = \{4 - \sqrt{7}; 4 + \sqrt{7}\}$ .

b) Để làm câu hỏi này, ta sẽ chia thành hai trường hợp

TH1: Khi  $m = 1 \Rightarrow 5 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow m = 1$  thỏa mãn.

TH2: Khi  $m$  khác 1, PT (1) là PT bậc hai. Xét

$$\Delta' = 4m^2 - (m-1)(4m+1) = 4m^2 - (4m^2 - 3m - 1) = 3m + 1$$

PT (1) có nghiệm khi  $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 3m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{3}$

Tóm lại, vậy với  $m \geq -\frac{1}{3}$  thì PT đã cho có nghiệm.

c) PT (1) có 2 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Khi đó, áp dụng hệ thức Viet ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{4m}{m-1} = \frac{4(m-1) + 4}{m-1} = 4 + \frac{4}{m-1}$$

$$x_1x_2 = \frac{4m+1}{m-1} = \frac{4(m-1) + 5}{m-1} = 4 + \frac{5}{m-1}$$

$$\text{Do đó } 5(x_1 + x_2) = 5\left(4 + \frac{4}{m-1}\right) = 4\left(5 + \frac{5}{m-1}\right) = 4(1 + x_1x_2)$$

Vậy biểu thức cần tìm là  $5(x_1 + x_2) = 4(1 + x_1x_2)$ .



d) PT (1) có 2 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 3m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có  $x_1 + x_2 = \frac{4m}{m-1}$ ;  $x_1 x_2 = \frac{4m+1}{m-1}$

Khi đó với  $m \neq 1, m > -\frac{1}{3}$  ta có

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 17 &\Leftrightarrow \frac{4m}{m-1} + \frac{4m+1}{m-1} = 17 \Leftrightarrow \frac{4m+4m+1}{m-1} = 17 \\ &\Leftrightarrow \frac{8m+1}{m-1} = 17 \Leftrightarrow 8m+1 = 17m-17 \Leftrightarrow 9m = 18 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn ĐK)} \end{aligned}$$

Vậy  $m = 2$  là giá trị cần tìm.

e) PT (1) có 2 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi  $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$

- $x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{4m+1}{m-1} > 0 \Leftrightarrow (4m+1)(m-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{1}{4} \end{cases}$

- $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{4m}{m-1} > 0 \Leftrightarrow 4m(m-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm dương phân biệt khi  $m > 1$  or  $-\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4}$ .

f) PT (1) có 2 nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi  $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Đến đây ta làm tương tự như câu e.

g) PT (1) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi  $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases}$

Đến đây ta làm tương tự như câu e.

h) Bình phương hai vế và làm tương tự như câu d, chú ý

$$|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2.$$

i) ĐK để PT (1) có 2 nghiệm phân biệt:  $m \neq 1, m > -\frac{1}{3}$ .

Từ giả thiết bài toán, ta có:  $x_1 = 2x_2$  or  $x_2 = 2x_1 \Rightarrow (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0$

$$\Rightarrow 5x_1 x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow 9x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có  $x_1 + x_2 = \frac{4m}{m-1}$ ;  $x_1 x_2 = \frac{4m+1}{m-1}$ , nên

$$\frac{9(4m+1)}{m-1} - \frac{2 \cdot 16m^2}{(m-1)^2} = 0 \Rightarrow 9(m-1)(4m+1) - 32m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 36m^2 - 27m - 9 - 32m^2 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 27m - 9 = 0$$

Đến đây các em làm tiếp, chú ý điều kiện PT có 2 nghiệm phân biệt.

### NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý KHI GIẢI TOÁN

- Đối với những bài toán có liên quan đến hệ thức Viet, thì ta đặc biệt quan tâm đến ĐK để phương trình có nghiệm, tìm ra được  $x$ , ta phải đối chiếu ĐK để PT có nghiệm.
- Ngoài các câu hỏi như trên ta còn có thể hỏi: tìm  $m$  thông qua giải bất phương trình (tương tự như câu hỏi d), tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất. Ví dụ trên, hệ số của  $x^2$  là tham số nên khi áp dụng Viet ta thấy có biến ở mẫu, thường người ta sẽ không hỏi min max ở bài này.
- Đối với bài toán mà hệ số của  $x^2$  không chứa tham số thì ta có thể hỏi min max thông qua hệ thức Viet. Chẳng hạn cho PT  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để PT có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ ; khi đó tìm min của biểu thức  $P = x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)$  ta có thể làm như sau

Để dàng tìm được ĐK để PT có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  là  $m \geq -1$  (các em làm đúng kỹ năng như VD). Áp dụng Viet ta có  $x_1 + x_2 = 2m + 2$ ;  $x_1 x_2 = m^2 - 1$

$$\text{Khi đó ta có } P = x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = m^2 - 1 + 2(2m + 2) = m^2 + 4m + 3$$

Đến đây có một sai lầm mà đa số HS mắc phải là phân tích

$$m^2 + 4m + 3 = (m+2)^2 - 1 \geq -1 \text{ và kết luận ngay min } P = -1.$$

Đối với bài toán này, cách làm trên hoàn toàn sai. Dựa vào điều kiện PT có nghiệm là  $m \geq -1$ , ta sẽ tìm min của  $P$  sao cho dấu bằng xảy ra khi  $m = -1$ . Ta có

$$P = m^2 + 4m + 3 = m^2 + m + 3m + 3 = m(m+1) + 3(m+1) = (m+1)(m+3)$$

$$\text{Với } m \geq -1 \Rightarrow m+1 \geq 0, m+3 > 0 \Rightarrow (m+1)(m+3) \geq 0 \Rightarrow P \geq 0$$

Vậy min  $P = 0$ , dấu bằng xảy ra khi  $m = -1$  (thỏa mãn ĐK đã nêu).

**Bài toán 2.2** Tìm  $m$  để PT  $x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0$  (i) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| = 2|x_2|$ .

➤ **Lời giải.** PT (i) có  $\Delta' = 4m^2 - 3m - 1$ , (i) có 2 nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + m - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m(m-1) + (m-1) \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(4m+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 1 \text{ or } m \leq -\frac{1}{4}.$$



Khi đó theo hệ thức Viet ta có  $x_1 + x_2 = 4m$  ;  $x_1 x_2 = 3m + 1$  (\*)

Ta lại có  $|x_1| = 2|x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$

+ Với  $x_1 = 2x_2$  kết hợp với (\*) ta được

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ 2x_2 + x_2 = 4m \\ 2x_2 x_2 = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ 3x_2 = 4m \\ 2x_2^2 = 3m + 1 \end{cases}$$

Từ  $3x_2 = 4m \Rightarrow m = \frac{3}{4}x_2$ , thế vào  $2x_2^2 = 3m + 1$  ta được

$$2x_2^2 = \frac{9}{4}x_2 + 1 \Leftrightarrow 8x_2^2 = 9x_2 + 4 \Leftrightarrow 8x_2^2 - 9x_2 - 4 = 0.$$

Đến đây, các em làm tiếp để rèn luyện kỹ năng.

+ Với  $x_1 = -2x_2$  ta làm tương tự như trên.

**Nhận xét.** Bài toán trên, ta đã thế  $m$  bởi  $x_2$  bởi lẽ, khi làm như vậy ta không phải khai phương tức là nếu thế  $x_2$  bởi  $m$  thì ta sẽ phải khai phương, không thuận lợi. Ngoài cách làm trên ta còn có thể giải như sau:  $|x_1| = 2|x_2| \Leftrightarrow (x_1 + 2x_2)(x_1 - 2x_2) = 0$ . Từ đó khai triển ra và dùng hệ thức Viet để giải.

## B. CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

**Bài 1:** Cho phương trình  $m\sqrt{2x} - (\sqrt{2} - 1)^2 = \sqrt{2} - x + m^2$

- Giải phương trình khi  $m = \sqrt{2} + 1$
- Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = 3 - \sqrt{2}$
- Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm dương duy nhất.

**Bài 2:** Cho phương trình  $(m - 4)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$

- Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = \sqrt{2}$ . Tìm nghiệm còn lại.
- Tìm  $m$  để phương trình 2 có nghiệm phân biệt.
- Tính  $x_1^2 + x_2^2$  theo  $m$ .

**Bài 3:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$

- Tìm  $m$  để phương trình 2 có nghiệm trái dấu
- Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi  $m$
- Chứng minh biểu thức  $M = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 4:** Tìm  $m$  để phương trình

- $x^2 - x + 2(m - 1) = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt
- $4x^2 + 2x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt
- $(m^2 + 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu.

**Bài 5:** Cho phương trình  $x^2 - (a-1)x - a^2 + a - 2 = 0$

- Chứng minh rằng phương trình trên có 2 nghiệm trái dấu với mọi a
- Gọi hai nghiệm của phương trình là  $x_1$  và  $x_2$ . Tìm giá trị của a để  $x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 6:** Cho b và c là hai số thoả mãn hệ thức  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$

Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình sau phải có nghiệm  $\begin{cases} x^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + cx + b = 0. \end{cases}$

**Bài 7:** Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm số chung

$$\begin{cases} 2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0 \\ 4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0 \end{cases}$$

**Bài 8:** Cho phương trình  $2x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$

- Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt
- Giả sử phương trình có hai nghiệm không âm, tìm nghiệm dương lớn nhất của phương trình.

**Bài 9:** Cho phương trình  $x^2 + 4x + m + 1 = 0$

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm
- Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thoả mãn điều kiện  $x_1^2 + x_2^2 = 10$

**Bài 10:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó hai nghiệm mang dấu gì.

**Bài 11:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$

- Giải và biện luận về số nghiệm của phương trình
- Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt là  $x_1; x_2$  hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa  $x_1; x_2$  mà không phụ thuộc vào m
- Tìm giá trị của m để  $10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 12:** Cho phương trình  $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$

- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m khác 1.
- Xác định giá trị của m để phương trình có tích hai nghiệm bằng 5, từ đó hãy tính tổng hai nghiệm của phương trình.
- Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.
- Tìm m để phương trình có nghiệm  $x_1; x_2$  thoả mãn hệ thức  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0$

**Bài 13:** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$

- Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm  $x_1; x_2$  với mọi m ; tính nghiệm kép (nếu có) của phương trình và giá trị của m tương ứng.



- b) Đặt  $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$
- Chứng minh  $A = m^2 - 8m + 8$
  - Tìm  $m$  để  $A = 8$
  - Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$  và giá trị của  $m$  tương ứng
- c) Tìm  $m$  sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia.

**Bài 14:** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

- Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm  $x_1; x_2$  với mọi  $m$ .
- Đặt  $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2$ 
  - Chứng minh  $A = 8m^2 - 18m + 9$
  - Tìm  $m$  sao cho  $A = 27$
- Tìm  $m$  sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia.

**Bài 15:** Giả sử phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_1; x_2$ . Đặt

$S_n = x_1^n + x_2^n$  với  $n$  là số nguyên dương.

- Chứng minh  $a.S_{n+2} + b.S_{n+1} + c.S_n = 0$
- Áp dụng tính giá trị của  $A = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$

**Bài 16:** Cho  $f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1$

- Chứng minh phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm với mọi  $m$ .
- Đặt  $x = t + 2$ , tính  $f(x)$  theo  $t$ , từ đó tìm điều kiện đối với  $m$  để phương trình  $f(x) = 0$  có 2 nghiệm lớn hơn 2.

**Bài 17:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$

- Xác định giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm.
- Xác định giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương.
- Xác định  $m$  để phương trình có hai nghiệm có giá trị tuyệt đối bằng nhau và trái dấu nhau.
- Gọi  $x_1; x_2$  là hai nghiệm nếu có của phương trình. Tính  $x_1^2 + x_2^2$  theo  $m$ .

**Bài 18:** Cho phương trình  $x^2 - 4x\sqrt{3} + 8 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1; x_2$ . Không giải phương

trình, hãy tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2}$

**Bài 19:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+2)x + m + 1 = 0$ .

- Giải phương trình khi  $m = \frac{1}{2}$ .
- Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Gọi  $x_1; x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của  $m$  để  $x_1(1 - 2x_2) + x_2(1 - 2x_1) = m^2$



**Bài 20:** Cho phương trình  $x^2 + mx + n - 3 = 0$  (i)

a) Cho  $n = 0$ , chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

b) Tìm  $m$  và  $n$  để hai nghiệm  $x_1; x_2$  của phương trình (i) thỏa mãn  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 7 \end{cases}$

**Bài 21:** Cho phương trình  $x^2 - 2(k - 2)x - 2k - 5 = 0$

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $k$

b) Gọi  $x_1; x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của  $k$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 = 18$

**Bài 22:** Cho phương trình  $(2m - 1)x^2 - 4mx + 4 = 0$

a) Giải phương trình khi  $m = 1$ .

b) Giải phương trình khi  $m$  tùy ý.

c) Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có một nghiệm bằng  $m$ .

**Bài 23:** Cho phương trình  $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$


a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Xác định  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $1 < x_1 < x_2 < 6$

### VẤN ĐỀ 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

#### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Bài toán 3.1** Giải hệ phương trình sau


$$\begin{cases} \frac{10}{\sqrt{12x-3}} + \frac{5}{\sqrt{4y+1}} = 1 \\ \frac{7}{\sqrt{12x-3}} + \frac{8}{\sqrt{4y+1}} = 1. \end{cases}$$

➤ **Hướng dẫn.** ĐK  $x > \frac{1}{4}, y > -\frac{1}{4}$ , đặt  $a = \frac{1}{\sqrt{12x-3}}, b = \frac{1}{\sqrt{4y+1}}$  với  $a, b > 0$ .

Khi đó, ta có hệ phương trình mới  $\begin{cases} 10a + 5b = 1 \\ 7a + 8b = 1 \end{cases}$

Đến đây các em làm tiếp, chú ý đối chiếu với ĐK khi tìm ra kết quả.

**Bài toán 3.2** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x(1+4y) + y = 2. \end{cases}$$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nam Định năm 2011)



➤ **Lời giải.** ĐK  $x, y \neq 0$ , khi đó  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \Leftrightarrow x + y = 4xy$

$$\text{Do đó } x(1+4y) + y = 2 \Leftrightarrow x + 4xy + y = 2 \Leftrightarrow x + x + y + y = 2 \\ \Leftrightarrow 2(x+y) = 2 \Leftrightarrow x+y=1$$

Mà  $4xy = x + y \Rightarrow 4xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{4}$ . Như vậy  $x + y = 1$ ;  $xy = \frac{1}{4}$ .

Do đó  $x, y$  là nghiệm của PT

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Từ đó  $x = y = \frac{1}{2}$  (thỏa mãn ĐK).

Vậy  $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  là nghiệm duy nhất của HPT đã cho.

### Bài toán 3.3 Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} + \frac{2}{y+1} = \frac{17}{5} & (1) \\ \frac{2x-2}{x-2} + \frac{y+2}{y-1} = \frac{26}{5} & (2) \end{cases}$$

(Đề chung Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định năm 2011)

➤ **Hướng dẫn.** ĐK  $x \neq 2, y \neq -1, y \neq 1$ . Khi đó (2) tương đương với

$$\frac{2(x-2)+2}{x-2} + \frac{y+2}{y-1} = \frac{26}{5} \Leftrightarrow 2 + \frac{2}{x-2} + \frac{y+2}{y-1} = \frac{26}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} + \frac{y+2}{y-1} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{6}{x-2} + \frac{3(y+2)}{y-1} = \frac{48}{5} \quad (i)$$

$$\text{Với } x \neq 2, y \neq -1, y \neq 1 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \frac{6}{x-2} + \frac{4}{y+1} = \frac{34}{5} \Leftrightarrow \frac{6}{x-2} = \frac{34}{5} - \frac{4}{y+1} \quad (ii)$$

$$\text{Từ (i) và (ii) ta có: } \frac{34}{5} - \frac{4}{y+1} + \frac{3(y+2)}{y-1} = \frac{48}{5} \Leftrightarrow \frac{3(y+2)}{y-1} - \frac{4}{y+1} = \frac{14}{5}$$

Đến đây, các em rút gọn quy về phương trình bậc hai và giải bình thường.

### Bài toán 3.4 Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 3y \\ y^2 + y + 1 = 3x \end{cases}$$

➤ **Lời giải.** Trừ vế đối vế hai PT ta được

$$x^2 + x + 1 - y^2 - y - 1 = 3y - 3x \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4x - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)+4(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=-x-4 \end{cases}$$

+ Với  $x = y$  thế vào  $x^2 + x + 1 = 3y$  ta được

$$x^2 + x + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Do đó  $(x; y) = (1; 1)$  là một nghiệm của HPT đã cho.

+ Với  $y = -x - 4$  thế vào  $x^2 + x + 1 = 3y$  ta được

$$x^2 + x + 1 = 3(-x-4) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 9 = 0 \quad (*)$$

Mặt khác  $(x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)^2 + 9 \geq 9 > 0$ , do đó (\*) vô nghiệm.

Vậy  $(x; y) = (1; 1)$  là nghiệm duy nhất của HPT đã cho.

**Nhận xét.** Khi ta thay đổi vị trí của  $x$  và  $y$  cho nhau thì HPT không thay đổi. Với những HPT đối xứng như trên, thì ta sẽ trừ về các PT với nhau (thường thì ta sẽ thu được  $x = y$ , sử dụng kết quả này để phân tích thành nhân tử), sau đó thế vào một trong hai PT của hệ rồi giải PT một ẩn. Ta dễ dàng chứng minh được  $x$  và  $y$  dương bằng cách làm sau đây:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}; y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Biến  $y \rightarrow 2y$  ta có HPT khó hơn một chút

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 6y \\ 4y^2 + 2y + 1 = 3x. \end{cases}$$

Đôi khi người ta lại cho HPT gần đối xứng, chẳng hạn ta xét bài toán sau.

**Bài toán 3.5** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + y + 1 = 3x. \end{cases}$$

➤ **Hướng dẫn.** Trừ đối về hai PT ta được

$$x^2 + 1 - y^2 - y - 1 = 2y - 3x \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 3x - 3y = 0$$

Đến đây các em giải như bài toán trên.

**Bài toán 3.6** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 5 \\ 2x^2 - 2xy + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

➤ **Lời giải.** HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4(x^2 + 3xy + y^2) = 20 \\ 5(2x^2 - 2xy + 4y^2) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 4(x^2 + 3xy + y^2) = 5(2x^2 - 2xy + 4y^2) \\ &\Rightarrow 6x^2 + 16y^2 - 22xy = 0 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 8y^2 - 11xy = 0 \\ &\Rightarrow 3x^2 - 3xy + 8y^2 - 8xy = 0 \\ &\Rightarrow 3x(x - y) - 8y(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow (x - y)(3x - 8y) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 3x/8 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với  $x = y$ , thế vào HPT đã cho ta có

$$\begin{cases} x^2 + 3x^2 + x^2 = 5 \\ 2x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 5 \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Ta có  $x = 1 \Rightarrow y = 1, x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (x; y) = (1; 1), (-1; -1)$  là 2 nghiệm của HPT.

+ Với  $y = 3x/8$ , các em làm tương tự như trên.

**Nhận xét.** Để giải bài toán trên ta có thể làm như sau

+ Xét  $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ 2x^2 = 4 \end{cases}$  HPT này vô nghiệm nên  $y = 0$  không thỏa mãn.

+ Xét  $y \neq 0$ , đặt  $x = yt$  thế vào HPT đã cho ta được

$$\begin{cases} y^2 t^2 + 3yt \cdot y + y^2 = 5 \\ 2y^2 t^2 - 2yt \cdot y + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2 + 3t + 1) = 5 \\ y^2(2t^2 - 2t + 4) = 4 \end{cases}$$

Vì  $y$  khác 0 nên ta có  $\frac{y^2(t^2 + 3t + 1)}{y^2(2t^2 - 2t + 4)} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t + 1}{2t^2 - 2t + 4} = \frac{5}{4}$

Đến đây các em tìm được  $t$  để suy ra mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  rồi giải như trên.

## B. CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

**Bài 1:** Tìm giá trị của  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện  $x + y$  nhỏ nhất

$$\begin{cases} (m+1)x - y = m+1 \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases}$$

**Bài 2:** Xác định  $a$  và  $b$  để hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$$



**Bài 3:** Giải hệ phương trình sau trên R

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x - xy + y = -1 \end{cases}$$

**Bài 4:** Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 \\ (x-y)^2 + m(x-y-1) - x + y = 0 \end{cases}$$

**Bài 5:** Giải hệ phương trình sau trên R

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 - 4xy - 2y^2 = -6 \end{cases}$$

**Bài 6:** Tính  $a^2 + b^2$  biết rằng a và b thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3 + 2b^2 - 4b + 3 = 0 \\ a^2 + a^2b^2 - 2b = 0 \end{cases}$$

**Bài 7:** Giải hệ phương trình sau trên R

$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 6. \end{cases}$$

**Bài 8:** Giải hệ phương trình sau trên R

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 3 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4. \end{cases}$$

**Bài 9:** Giải hệ phương trình sau trên R

$$\begin{cases} x^2 + 5xy - 2y^2 = 4 \\ 3x^2 + 2xy - 3y^2 = 2. \end{cases}$$

**Bài 10:** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = 1 \\ 3y - 1 = xy. \end{cases}$$

*(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nam Định năm 2012)*

**Bài 11:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} (a+1)x - y = 3 \\ a.x + y = a \end{cases}$

- Giải hệ phương trình khi  $a = -\sqrt{2}$
- Xác định giá trị của a để hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn  $x + y > 0$ .

## VẤN ĐỀ 4. CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Xét parabol (P):  $y = ax^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx + n$   
Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình  $ax^2 - mx - n = 0$  (\*) (Cần lưu ý thuật ngữ này trong giải toán)
- (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi (\*) có hai nghiệm phân biệt.
  - (d) cắt (P) khi và chỉ khi (\*) có nghiệm.
  - (d) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi (\*) có nghiệm kép.
- Ngoài ra các em cần chú ý đến bài toán tìm m để hai đường thẳng song song với nhau, vuông góc với nhau, hàm số đồng biến, nghịch biến.

### B. CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

**Bài 1:** Cho hàm số  $y = (m-2)x + n$  (d). Tìm giá trị của m và n để đồ thị (d) của hàm số.

- Đi qua hai điểm  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; -4)$ .
- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $1 - \sqrt{2}$  và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng  $2 + \sqrt{2}$ .
- Cắt đường thẳng  $x - 2y - 3 = 0$ .
- Song song với đường thẳng  $3x + 2y = 1$ .

**Bài 2:** Cho hàm số  $y = 2x^2$  (P).

- Vẽ đồ thị (P).
- Tìm trên đồ thị các điểm cách đều hai trục tọa độ.
- Xét số giao điểm của (P) với đường thẳng (d):  $y = mx - 1$  theo m.
- Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua điểm  $M(0; -2)$  và tiếp xúc với (P).

**Bài 3:** Cho (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = 2x + m$

- Xác định m để hai đường đó
  - Tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.
  - Cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B, một điểm có hoành độ  $x = -1$ . Tìm hoành độ điểm còn lại. Tìm tọa độ A và B.
- Trong trường hợp tổng quát, giả sử (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M và N. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn MN theo m và tìm quỹ tích của điểm I khi m thay đổi.

**Bài 4:** Cho đường thẳng (d):  $2(m-1)x + (m-2)y = 2$

- Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P):  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt A và B.
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB theo m.
- Tìm m để (d) cách gốc tọa độ một khoảng Max.
- Tìm điểm cố định mà (d) đi qua khi m thay đổi.

**Bài 5:** Cho (P):  $y = -x^2$

- Tìm tập hợp các điểm M sao cho từ đó có thể kẻ được hai đường thẳng vuông góc với nhau và tiếp xúc với (P).

b) Tìm trên (P) các điểm sao cho khoảng cách tới gốc toạ độ bằng  $\sqrt{2}$ .

**Bài 6:** Cho đường thẳng (d) :  $y = \frac{3}{4}x - 3$

- Vẽ (d).
- Tính diện tích tam giác được tạo thành giữa (d) và hai trục toạ độ.
- Tính khoảng cách từ gốc O đến (d).

**Bài 7:** Cho hàm số  $y = |x - 1|$  (d)

- Nhận xét dạng của đồ thị. Vẽ đồ thị (d).
- Dùng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình  $|x - 1| = m$

**Bài 8:** Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng (d) :  $y = (m - 1)x + 2$  ; (d') :  $y = 3x - 1$

- Song song với nhau.
- Cắt nhau.
- Vuông góc với nhau.

**Bài 9:** Tìm giá trị của a để ba đường thẳng sau đồng quy tại một điểm trong mặt phẳng toạ độ.

$$(d_1): y = 2x - 5 ; (d_2): y = x + 2 ; (d_3): y = ax - 12.$$

**Bài 10:** Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (d) :  $2x + (m - 1)y = 1$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 11:** Cho (P) :  $y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng (d) :  $y = ax + b$ . Xác định a và b để đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1;0) và tiếp xúc với (P).

**Bài 12:** Cho hàm số  $y = |x - 1| + |x + 2|$

- Vẽ đồ thị hàm số trên.
- Dùng đồ thị câu a biện luận theo m số nghiệm của phương trình  $|x - 1| + |x + 2| = m$

**Bài 13:** Cho (P) :  $y = x^2$  ; (d) :  $y = 2x + m$ .

- Vẽ (P).
- Tìm m để (P) tiếp xúc (d).

**Bài 14:** Cho (P) :  $y = -\frac{x^2}{4}$  ; (d) :  $y = x + m$ .

- Vẽ (P).
- Xác định m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.
- Xác định phương trình đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) và cắt (P) tại điểm có tung độ bằng -4.
- Xác định phương trình đường thẳng (d'') vuông góc với (d) và đi qua giao điểm của (d) và (P)

**Bài 15:** Cho hàm số  $y = x^2$  (P) và hàm số  $y = x + m$  (d)

- Tìm m sao cho (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B
- Xác định phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P)



- c) Thiết lập công thức tính khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Áp dụng tìm m sao cho khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng  $3\sqrt{2}$

**Bài 16:** Cho điểm A(-2;2) và đường thẳng  $(d_1): y = 2(x+1)$ .

- Điểm A có thuộc  $(d_1)$  không.
- Tìm a để hàm số  $y = a.x^2$  (P) đi qua A.
- Xác định phương trình đường thẳng  $(d_2)$  đi qua A và vuông góc với  $(d_1)$ .
- Gọi A và B là giao điểm của (P) và  $(d_2)$ ; C là giao điểm của  $(d_1)$  với trục tung. Tìm toạ độ của B và C. Tính diện tích tam giác ABC.

**Bài 17:** Cho (P) :  $y = \frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng (d) qua hai điểm A và B trên (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
- Viết phương trình đường thẳng (d).
- Tìm điểm M trên cung AB của (P) tương ứng hoành độ  $x \in [-2;4]$  sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

**Bài 18:** Cho (P) :  $y = -\frac{x^2}{4}$  và điểm M (1;-2).

- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và có hệ số góc là m.
- Chứng minh  $-(d)$  luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi m thay đổi.
- Gọi  $x_A; x_B$  lần lượt là hoành độ của A và B. Xác định m để  $x_A^2 x_B + x_A x_B^2$  đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó.
- Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên trục hoành và S là diện tích tứ giác AA'B'B. Tính S theo m.

**Bài 19:** Cho hàm số  $y = x^2$  (P)

- Vẽ (P).
- Gọi A, B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Viết phương trình đường thẳng AB.
- Viết phương trình đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với (P).

**Bài 20:** Cho parabol (P) :  $y = -\frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx - 2m - 1$

- Vẽ (P).
- Tìm m sao cho (P) và (d) tiếp xúc nhau. Tìm toạ độ tiếp điểm.
- Chứng tỏ rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 21:** Cho (P) :  $y = -\frac{1}{4}x^2$  và điểm I(0;-2). Gọi (d) là đường thẳng qua I và có hệ số góc m.

- Vẽ (P) và chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Tìm giá trị của m để đoạn AB ngắn nhất.



**Bài 22:** Cho (P) :  $y = -\frac{x^2}{4}$  và đường thẳng (d) đi qua điểm  $I(3/2;1)$  có hệ số góc là m.

- Vẽ (P) và viết phương trình (d).
- Tìm m sao cho (d) tiếp xúc (P).
- Tìm m sao cho (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt.

**Bài 23:** Cho (P) :  $y = \frac{x^2}{4}$  và đường thẳng (d) :  $y = -\frac{x}{2} + 2$

- Vẽ (P) và (d).
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).
- Tìm tọa độ của điểm thuộc (P) sao cho tại đó đường tiếp tuyến của (P) song song với (d).

**Bài 24:** Cho (P) :  $y = x^2$

- Vẽ (P).
- Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Viết phương trình đường thẳng AB.
- Viết phương trình đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với (P).

**Bài 25:** Cho (P) :  $y = 2x^2$

- Vẽ (P).
- Trên (P) lấy điểm A có hoành độ  $x = 1$  và điểm B có hoành độ  $x = 2$ . Xác định các giá trị của m và n để đường thẳng (d) :  $y = mx + n$  tiếp xúc với (P) và song song với AB.

**Bài 26:** Xác định giá trị của m để hai đường thẳng  $(d_1): x + y = m$  ;  $(d_2): mx + y = 1$  cắt nhau tại một điểm trên (P) :  $y = -2x^2$ .

## VẤN ĐỀ 5. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

### DẠNG 1. TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

**Bài 1:** Hai tỉnh A và B cách nhau 180 km. Cùng một lúc, một ô tô đi từ A đến B và một xe máy đi từ B về A. Hai xe gặp nhau tại thị trấn C. Từ C đến B ô tô đi hết 2 giờ, còn từ C về A xe máy đi hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc của mỗi xe biết rằng trên đường AB hai xe đều chạy với vận tốc không đổi.

**Bài 2:** Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi lại ngược dòng từ bến B về bến A mất tất cả 4 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30 km và vận tốc dòng nước là 4 km/h.

**Bài 3:** Một ca nô xuôi từ bến A đến bến B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h.

**Bài 4:** Một người chuyển động đều trên một quãng đường gồm một đoạn đường bằng và một đoạn đường dốc. Vận tốc trên đoạn đường bằng và trên đoạn đường dốc tương ứng là 40 km/h và 20 km/h. Biết rằng đoạn đường dốc ngắn hơn đoạn đường bằng là 110km và thời gian để người đó đi cả quãng đường là 3 giờ 30 phút. Tính chiều dài quãng đường người đó đã đi.

**Bài 5:** Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ A đến B. Xe tải đi với vận tốc 30 km/h, xe con đi với vận tốc 45 km/h. Sau khi đi được  $\frac{3}{4}$  quãng đường AB, xe con tăng vận tốc thêm 5 km/h trên quãng đường còn lại. Tính quãng đường AB biết rằng xe con đến B sớm hơn xe tải 2 giờ 20 phút.

**Bài 6:** Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 Km với một vận tốc xác định. Khi từ B về A người đó đi bằng con đường khác dài hơn trước 29 Km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 3 Km/h. Tính vận tốc lúc đi, biết rằng thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 1 giờ 30 phút.

**Bài 7:** Hai ca nô cùng khởi hành từ hai bến A, B cách nhau 85 Km đi ngược chiều nhau. Sau 1h40' thì gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược 9Km/h và vận tốc dòng nước là 3 Km/h.

**Bài 8:** Hai địa điểm A, B cách nhau 56 Km. Lúc 6h45phút một người đi xe đạp từ A với vận tốc 10 Km/h. Sau đó 2 giờ một người đi xe đạp từ B đến A với vận tốc 14 Km/h. Hỏi đến mấy giờ họ gặp nhau và chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu Km.

**Bài 9:** Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 15 Km/h. Sau đó một thời gian, một người đi xe máy cũng xuất phát từ A với vận tốc 30 Km/h và nếu không có gì thay đổi thì sẽ đuổi kịp người đi xe máy tại B. Nhưng sau khi đi được nửa quãng đường AB, người đi xe đạp giảm bớt vận tốc 3 Km/h nên hai người gặp nhau tại C cách B 10 Km. Tính quãng đường AB

**Bài 10:** Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc trung bình là 30 Km/h. Khi đến B người đó nghỉ 20 phút rồi quay trở về A với vận tốc trung bình là 24 Km/h. Tính quãng đường AB biết rằng thời gian cả đi lẫn về là 5 giờ 50 phút.

**Bài 11:** Một ca nô xuôi từ bến A đến bến B với vận tốc trung bình 30 Km/h, sau đó ngược từ B về A. Thời gian đi xuôi ít hơn thời gian đi ngược là 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 3 Km/h và vận tốc riêng của ca nô là không đổi.

**Bài 12:** Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình là 40 Km/h. Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó, khi còn 60 Km nữa thì được một nửa quãng đường AB, người lái xe tăng vận tốc thêm 10 Km/h trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

**Bài 13:** Hai ca nô khởi hành cùng một lúc và chạy từ bến A đến bến B. Ca nô I chạy với vận tốc 20 Km/h, ca nô II chạy với vận tốc 24 Km/h. Trên đường đi ca nô II dừng lại 40 phút, sau đó tiếp tục chạy. Tính chiều dài quãng đường sông AB biết rằng hai ca nô đến B cùng một lúc.

**Bài 14:** Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 50 Km. Sau đó 1 giờ 30 phút, một người đi xe máy cũng đi từ A và đến B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng vận tốc của xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp.

**Bài 15:** Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ , xuôi dòng 108 Km và ngược dòng 63 Km. Một lần khác , ca nô đó cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 Km và ngược dòng 84 Km . Tính vận tốc dòng nước chảy và vận tốc riêng ( thực ) của ca nô.

**Bài 16:** Một tàu thủy chạy trên một khúc sông dài 80 Km , cả đi và về mất 8 giờ 20 phút . Tính vận tốc của tàu khi nước yên lặng , biết rằng vận tốc dòng nước là 4 Km/h.

**Bài 17:** Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A . Sau đó 5 giờ 20 phút một chiếc ca nô chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp chiếc thuyền tại một điểm cách bến A 20 Km. Hỏi vận tốc của thuyền biết rằng ca nô chạy nhanh hơn thuyền 12 Km/h.

**Bài 18:** Một ô tô chuyển động đều với vận tốc đã định để đi hết quãng đường dài 120 Km trong một thời gian đã định . Đi được một nửa quãng đường xe nghỉ 3 phút nên để đến nơi đúng giờ , xe phải tăng vận tốc thêm 2 Km/h trên nửa quãng đường còn lại . Tính thời gian xe lăn bánh trên đường .

**Bài 19:** Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 Km trong một thời gian quy định . Sau khi đi được 1 giờ ô tô bị chặn đường bởi xe hoả 10 phút . Do đó , để đến B đúng hạn , xe phải tăng vận tốc thêm 6 Km/h . Tính vận tốc lúc đầu của ô tô.

**Bài 20:** Một người đi xe đạp từ A đến B trong một thời gian đã định . Khi còn cách B 30 Km , người đó nhận thấy rằng sẽ đến B chậm nửa giờ nếu giữ nguyên vận tốc đang đi , nhưng nếu tăng vận tốc thêm 5 Km/h thì sẽ tới đích sớm hơn nửa giờ . Tính vận tốc của xe đạp trên quãng đường đã đi lúc đầu.

## DẠNG 2. TOÁN NĂNG SUẤT

**Bài 21:** Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì làm xong trong 4 giờ . Nếu mỗi đội làm một mình để làm xong công việc ấy , thì đội thứ nhất cần thời gian ít hơn so với đội thứ hai là 6 giờ . Hỏi mỗi đội làm một mình xong công việc ấy trong bao lâu?

**Bài 22:** Một xí nghiệp đóng giày dự định hoàn thành kế hoạch trong 26 ngày . Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày đã vượt mức 6000 đôi giày do đó chẳng những đã hoàn thành kế hoạch đã định trong 24 ngày mà còn vượt mức 104 000 đôi giày . Tính số đôi giày phải làm theo kế hoạch.

**Bài 23:** Một cơ sở đánh cá dự định trung bình mỗi tuần đánh bắt được 20 tấn cá , nhưng đã vượt mức được 6 tấn mỗi tuần nên chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm 1 tuần mà còn vượt mức kế hoạch 10 tấn . Tính mức kế hoạch đã định

**Bài 24:** Một đội xe cần chuyên chở 36 tấn hàng . Trước khi làm việc đội xe đó được bổ xung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định . Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu xe ? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.

**Bài 25:** Hai tổ sản xuất cùng nhận chung một mức khoán . Nếu làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành được  $\frac{2}{3}$  mức khoán . Nếu để mỗi tổ làm riêng thì tổ này sẽ làm xong mức khoán thì mỗi tổ phải làm trong bao lâu ?

**Bài 26:** Hai tổ công nhân làm chung trong 12 giờ sẽ hoàn thành xong công việc đã định . Họ làm chung với nhau trong 4 giờ thì tổ thứ nhất được điều đi làm việc khác , tổ thứ hai làm nốt công việc còn lại trong 10 giờ . Hỏi tổ thứ hai làm một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

**Bài 27:** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong . Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được 25% côngviệc. Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong.

### DẠNG 3. TOÁN THỂ TÍCH

**Bài 28:** Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không chứa nước đã làm đầy bể trong 5 giờ 50 phút Nếu chảy riêng thì vòi thứ hai chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ nhất là 4 giờ . Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy trong bao lâu sẽ đầy bể ?

**Bài 29:** Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước và chảy đầy bể mất 1 giờ 48 phút . Nếu chảy riêng , vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai trong 1 giờ 30 phút . Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu ?

**Bài 30:** Một máy bơm muốn bơm đầy nước vào một bể chứa trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm được  $10 \text{ m}^3$  . Sau khi bơm được  $\frac{1}{3}$  thể tích bể chứa , máy bơm hoạt động với công suất lớn hơn , mỗi giờ bơm được  $15 \text{ m}^3$  . Do vậy so với quy định , bể chứa được bơm đầy trước 48 phút. Tính thể tích bể chứa.

**Bài 31:** Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể chứa không có nước thì sau 1 giờ 30 phút sẽ đầy bể . Nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút rồi khoá lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì sẽ được  $\frac{1}{5}$  bể . Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể ?

**Bài 32:** Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể chứa không có nước thì sau 2 giờ 55 phút sẽ đầy bể Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 2 giờ . Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy đầy bể trong bao lâu.



## VẤN ĐỀ 6. CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔNG HỢP

**Bài 1:** Cho hai đường tròn tâm  $O$  và  $O'$  có  $R > R'$  tiếp xúc ngoài tại  $C$ . Kẻ các đường kính  $COA$  và  $CO'B$ . Qua trung điểm  $M$  của  $AB$ , dựng  $DE$  vuông góc với  $BC$ .

- Tứ giác  $ADBE$  là hình gì.
- Nối  $D$  với  $C$  cắt đường tròn tâm  $O'$  tại  $F$ . Chứng minh  $B, E, F$  thẳng hàng.
- Nối  $D$  với  $B$  cắt đường tròn tâm  $O'$  tại  $G$ . Chứng minh  $EC$  đi qua  $G$ .
- Xét vị trí của  $MF$  đối với đường tròn tâm  $O'$ , vị trí của  $AE$  với đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $MCFE$ .

**Bài 2:** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $CD = 2R$ . Dựng  $Cx, Dy$  vuông góc với  $CD$ . Từ điểm  $E$  bất kì trên nửa đường tròn, dựng tiếp tuyến với đường tròn, cắt  $Cx$  tại  $P$ , cắt  $Dy$  tại  $Q$ .

- Chứng minh tam giác  $POQ$  vuông và  $\Delta POQ$  đồng dạng với  $\Delta CED$ .
- Tính tích  $CP \cdot DQ$  theo  $R$ .
- Tính thể tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn tâm  $O$  và hình thang vuông  $CPQD$  khi chúng cùng quay theo một chiều và trọn một vòng quanh  $CD$ .

**Bài 3:** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  có hai đường kính  $AOB, COD$  vuông góc với nhau. Lấy điểm  $E$  bất kì trên  $OA$ , nối  $CE$  cắt đường tròn tại  $F$ . Qua  $F$  dựng tiếp tuyến  $Fx$  với đường tròn, qua  $E$  dựng  $Ey$  vuông góc với  $OA$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $Fx$  và  $Ey$ .

- Chứng minh  $I, F, E, O$  cùng thuộc một đường tròn.
- Tứ giác  $CEIO$  là hình gì.
- Khi  $E$  chuyển động trên  $AB$  thì  $I$  chuyển động trên đường nào.

**Bài 4:** Cho đường tròn tâm  $O$  và một điểm  $A$  trên đường tròn. Qua  $A$  dựng tiếp tuyến  $Ax$ . Trên  $Ax$  lấy một điểm  $Q$  bất kì, dựng tiếp tuyến  $QB$ .

- Chứng minh tứ giác  $QBOA$  nội tiếp.
- Gọi  $E$  là trung điểm của  $QO$ , tìm quỹ tích của  $E$  khi  $Q$  chuyển động trên  $Ax$ .
- Hạ  $BK \perp Ax$ ,  $BK$  cắt  $QO$  tại  $H$ . Chứng minh tứ giác  $OBHA$  là hình thoi, từ đó suy ra quỹ tích của điểm  $H$ .

**Bài 5:** Cho  $\Delta ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Các đường cao  $AD, BK$  cắt nhau tại  $H$ ,  $BK$  kéo dài cắt đường tròn tại  $F$ . Vẽ đường kính  $BOE$ .

- Tứ giác  $AFEC$  là hình gì.
- Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Chứng minh  $H, I, E$  thẳng hàng.
- Chứng minh  $OI = \frac{BH}{2}$  và  $H, F$  đối xứng nhau qua  $AC$ .

**Bài 6:** Cho  $(O, R)$  và  $(O', R')$  với  $R > R'$  tiếp xúc trong tại  $A$ . Đường nối tâm cắt đường tròn  $O$  và đường tròn  $O'$  tại  $B$  và  $C$ . Qua trung điểm  $P$  của  $BC$  dựng dây  $MN$  vuông góc với  $BC$ . Nối  $A$  với  $M$  cắt đường tròn  $O'$  tại  $E$ .

- So sánh hai góc  $AMO$  và  $NMC$ .
- Chứng minh  $N, B, E$  thẳng hàng và  $O'P = R; OP = R'$ .
- Xét vị trí của  $PE$  với đường tròn tâm  $O'$ .

**Bài 7:** Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Lấy  $B$  làm tâm vẽ đường tròn bán kính  $OB$ . Đường tròn này cắt đường tròn  $O$  tại  $C$  và  $D$ .

- a) Tứ giác ODBC là hình gì.
- b) Chứng minh  $OC \perp AD$  ;  $OD \perp AC$
- c) Chứng minh trực tâm của tam giác CDB nằm trên đường tròn tâm B.

**Bài 8:** Cho đường tròn tâm O và một đường thẳng d cắt đường tròn đó tại hai điểm cố định A và B . Từ một điểm M bất kì trên đường thẳng d nằm ngoài đoạn AB người ta kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn là MP và MQ ( P, Q là các tiếp điểm ).

- a) Tính các góc của  $\Delta MPQ$  biết rằng góc giữa hai tiếp tuyến MP và MQ là  $45^\circ$
- b) Gọi I là trung điểm AB . Chứng minh M , P , Q , O , I cùng nằm trên một đường tròn.
- c) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta MPQ$  khi M chạy trên d.

**Bài 9:** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn tâm O , tia phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại E và cắt đường tròn tại M .

- a) Chứng minh  $OM \perp BC$
- b) Dựng tia phân giác ngoài Ax của góc A . Chứng minh Ax đi qua một điểm cố định
- c) Kéo dài Ax cắt CB kéo dài tại F . Chứng minh:  $FB \cdot EC = FC \cdot EB$

**Bài 10:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = AC$  và góc BAC nhọn, một cung tròn BC nằm trong  $\Delta ABC$  và tiếp xúc với AB , AC tại B và C . Trên cung BC lấy điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI , MH , MK xuống các cạnh tương ứng BC , CA , AB . Gọi P là giao điểm của MB , IK và Q là giao điểm của MC , IH.

- a) CMR các tứ giác BIMK , CIMH nội tiếp
- b) CMR tia đối của tia MI là phân giác của góc HMK
- c) CMR tứ giác MPIQ nội tiếp được, từ đó suy ra  $PQ \parallel BC$

**Bài 11:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AC > AB$  và góc BAC tù. Gọi I , K theo thứ tự là các trung điểm của AB , AC . Các đường tròn đường kính AB , AC cắt nhau tại điểm thứ hai D ; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E ; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

- a) CMR ba điểm B , C , D thẳng hàng
- b) CMR tứ giác BFEC nội tiếp được
- c) Chứng minh ba đường thẳng AD , BF , CE đồng quy
- d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AEF$  . Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH , DE .

**Bài 12:** Cho đường tròn (O;R) và điểm A với  $OA = R\sqrt{2}$  , một đường thẳng (d) quay quanh A cắt (O) tại M , N ; gọi I là trung điểm của đoạn MN.

- a) Chứng minh  $OI \perp MN$ . Suy ra I di chuyển trên một cung tròn cố định với hai điểm giới hạn B , C thuộc (O).
- b) Tính theo R độ dài AB , AC. Suy ra A, O, B, C là bốn đỉnh của hình vuông.
- c) Tính diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đoạn AB, AC và cung nhỏ BC của (O).

**Bài 13:** Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R , C là trung điểm của cung AB . Trên cung AC lấy điểm F bất kì . Trên dây BF lấy điểm E sao cho  $BE = AF$ .

- a)  $\Delta AFC$  và  $\Delta BEC$  có quan hệ với nhau như thế nào.
- b) CMR  $\Delta FEC$  vuông cân
- c) Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn . CMR tứ giác BECD nội tiếp được.

**Bài 14:** Cho đường tròn  $(O;R)$  và hai đường kính  $AB, CD$  vuông góc với nhau.  $E$  là một điểm bất kì trên cung nhỏ  $BD$  ( $E \neq B; E \neq D$ ).  $EC$  cắt  $AB$  ở  $M$ ,  $EA$  cắt  $CD$  ở  $N$ .

- CMR  $\Delta AMC$  đồng dạng  $\Delta ANC$ .
- CMR:  $AM.CN = 2R^2$
- Giả sử  $AM=3MB$ . Tính tỉ số  $\frac{CN}{ND}$

**Bài 15:** Một điểm  $M$  nằm trên đường tròn tâm  $(O)$  đường kính  $AB$ . Gọi  $H, I$  lần lượt là hai điểm chính giữa các cung  $AM, MB$ ; gọi  $Q$  là trung điểm của dây  $MB$ ,  $K$  là giao điểm của  $AM, HI$ .

- Tính độ lớn góc  $HKM$ .
- Vẽ  $IP \perp AM$  tại  $P$ , chứng minh  $IP$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$ .
- Dựng hình bình hành  $APQR$ . Tìm tập hợp các điểm  $R$  khi  $M$  di động trên nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ .

**Bài 16:** Gọi  $O$  là trung điểm cạnh  $BC$  của  $\Delta ABC$  đều. Vẽ góc  $xOy = 60^\circ$  sao cho tia  $Ox$ ,  $Oy$  cắt cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $M, N$ .

- Chứng minh hai tam giác  $OBM$  và  $NCO$  đồng dạng, từ đó suy ra  $BC^2 = 4 BM.CN$
- Chứng minh  $MO, NO$  theo thứ tự là tia phân giác các góc  $BMN, MNC$ .
- Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định, khi góc  $xOy$  quay xung quanh  $O$  sao cho các tia  $Ox, Oy$  vẫn cắt các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đều  $ABC$ .

**Bài 17:** Cho  $M$  là điểm bất kì trên nửa đường tròn tâm  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$  ( $M \neq A, B$ ). Vẽ các tiếp tuyến  $Ax, By, Mz$  của nửa đường tròn đó. Đường  $Mz$  cắt  $Ax, By$  lần lượt tại  $N$  và  $P$ . Đường thẳng  $AM$  cắt  $By$  tại  $C$  và đường thẳng  $BM$  cắt  $Ax$  tại  $D$ . Chứng minh rằng

- Tứ giác  $AOMN$  nội tiếp đường tròn và  $NP = AN + BP$
- $N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AD$  và  $BC$
- $AD.BC = 4R^2$
- Xác định vị trí  $M$  để tứ giác  $ABCD$  có diện tích nhỏ nhất.

**Bài 18:** Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $(O)$  và  $I$  là điểm chính giữa cung  $AB$  (cung  $AB$  không chứa  $C$  và  $D$ ). Dây  $ID, IC$  cắt  $AB$  lần lượt tại  $M$  và  $N$

- Chứng minh tứ giác  $DMNC$  nội tiếp trong đường tròn.
- $IC$  và  $AD$  cắt nhau tại  $E$ ;  $ID$  và  $BC$  cắt nhau tại  $F$ . Chứng minh  $EF \parallel AB$ .

**Bài 19:** Cho đường tròn tâm  $(O)$  đường kính  $AC$ . Trên đoạn  $OC$  lấy điểm  $B$  khác  $C$  và vẽ đường tròn tâm  $(O')$  đường kính  $BC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Qua  $M$  kẻ dây cung  $DE$  vuông góc với  $AB$ ,  $DC$  cắt đường tròn  $(O')$  tại  $I$

- Tứ giác  $ADBE$  là hình gì,
- Chứng minh ba điểm  $I, B, E$  thẳng hàng,
- Chứng minh  $MI$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O')$  và  $MI^2 = MB.MC$

**Bài 20:** Cho đường tròn tâm  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$  và một điểm  $M$  di động trên một nửa đường tròn. Người ta vẽ một đường tròn tâm  $(E)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $M$  và tiếp xúc với đường

kính  $AB$  tại  $N$ . Đường tròn này cắt  $MA, MB$  lần lượt tại các điểm thứ hai  $C, D$ .

- Chứng minh  $CD \parallel AB$ .



- b) Chứng minh MN là tia phân giác của góc AMB và đường thẳng MN luôn đi qua một điểm K cố định.
- c) Chứng minh KM.KN không đổi.

**Bài 21:** Cho một đường tròn đường kính AB, các điểm C, D ở trên đường tròn sao cho C, D không nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB đồng thời  $AD > AC$ . Gọi các điểm chính giữa các cung AC, AD lần lượt là M, N; giao điểm của MN với AC, AD lần lượt là H, I; giao điểm của MD với CN là K

- a) Chứng minh  $\Delta NKD; \Delta MAK$  cân.
- b) Chứng minh tứ giác MCKH nội tiếp và  $KH // AD$ .
- c) So sánh góc CAK với góc DAK.

**Bài 22:** Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và đường thẳng (d) vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D; tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N; tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P.

- a) Chứng minh tứ giác ABMD nội tiếp.
- b) Chứng minh CM.CD không phụ thuộc vị trí của M
- c) Tứ giác APND là hình gì.
- d) Chứng minh trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

**Bài 23:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm M nằm trên cung AB; gọi H là điểm chính giữa của cung AM. Tia BH cắt AM tại một điểm I và cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại điểm K. Các tia AH; BM cắt nhau tại S.

- a) Tam giác BAS là tam giác gì? Tại sao? Suy ra điểm S nằm trên một đường tròn cố định.
- b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng KS với đường tròn (B;BA).
- c) Đường tròn đi qua B, I, S cắt đường tròn (B;BA) tại một điểm N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cung AB.
- d) Xác định vị trí của M sao cho góc MKA bằng  $90^\circ$ .

**Bài 24:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và P là điểm chính giữa của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt dây AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I; các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng

- a) Góc CID bằng góc CKD.
- b) Tứ giác CDFE nội tiếp được.
- c)  $IK // AB$ .
- d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

**Bài 25:** Cho hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  tiếp xúc ngoài với nhau tại A, kẻ tiếp tuyến chung Ax. Một đường thẳng d tiếp xúc với  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  lần lượt tại các điểm B, C và cắt Ax tại điểm M. Kẻ các đường kính  $BO_1D$  và  $CO_2E$ .

- a) Chứng minh M là trung điểm của BC
- b) Chứng minh tam giác  $O_1MO_2$  vuông
- c) Chứng minh B, A, E thẳng hàng và C, A, D thẳng hàng
- d) Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  $IO_1O_2$  tiếp xúc với đường thẳng d.

**Bài 26:** Cho  $(O; R)$  trên đó có một dây  $AB = R\sqrt{2}$  cố định và một điểm  $M$  di động trên cung lớn  $AB$  sao cho tam giác  $MAB$  có ba góc nhọn. Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $MAB$ ;  $P, Q$  lần lượt là các giao điểm thứ hai của các đường thẳng  $AH, BH$  với đường tròn  $(O)$ ;  $S$  là giao điểm của các đường thẳng  $PB, QA$ .

- Chứng minh  $PQ$  là đường kính của đường tròn  $(O)$
- Tứ giác  $AMBS$  là hình gì
- Chứng minh độ dài  $SH$  không đổi
- Gọi  $I$  là giao điểm của các đường thẳng  $SH, PQ$ . Chứng minh  $I$  chạy trên một đường tròn cố định.

**Bài 27:** Cho  $(O;R)$  đường kính  $AB$ , kẻ tiếp tuyến  $Ax$  và trên đó lấy điểm  $P$  sao cho  $AP > R$ . Kẻ tiếp tuyến  $PM$  ( $M$  là tiếp điểm).

- Chứng minh  $BM \parallel OP$
- Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $O$  cắt tia  $BM$  tại  $N$ . Tứ giác  $OBPN$  là hình gì.
- Gọi  $K$  là giao điểm của  $AN$  với  $OP$ ;  $I$  là giao điểm của  $ON$  với  $PM$ ;  $J$  là giao điểm của  $PN$  với  $OM$ . Chứng minh  $K, I, J$  thẳng hàng
- Xác định vị trí của  $P$  sao cho  $K$  nằm trên đường tròn  $(O)$ .

**Bài 28:** Cho đường tròn  $(O;R)$ , hai đường kính  $AB$  và  $CD$  vuông góc nhau. Trong đoạn thẳng  $AB$  lấy điểm  $M$  (khác điểm  $O$ ), đường thẳng  $CM$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $N$ . Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $M$  cắt tiếp tuyến tại  $N$  với đường tròn  $(O)$  ở điểm  $P$ .

- Chứng minh tứ giác  $OMNP$  nội tiếp.
- Tứ giác  $CMPO$  là hình gì.
- Chứng minh  $CM.CN$  không đổi.
- Chứng minh khi  $M$  di động trên đoạn  $AB$  thì  $P$  chạy trên một đường thẳng cố định.

**Bài 29:** Cho hai đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Các đường thẳng  $AO, AO'$  cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại các điểm thứ hai  $C, D$  và cắt đường tròn  $(O')$  lần lượt tại các điểm thứ hai  $E, F$ .

- Chứng minh  $B, F, C$  thẳng hàng.
- Chứng minh tứ giác  $CDEF$  nội tiếp.
- Chứng minh  $A$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $BDE$ .
- Tìm điều kiện để  $DE$  là tiếp tuyến chung của các đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .

**Bài 30:** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$  và một điểm  $M$  bất kỳ trên nửa đường tròn ( $M$  khác  $A$  và  $B$ ). Đường thẳng  $d$  tiếp xúc với nửa đường tròn tại  $M$  và cắt đường trung trực của đoạn  $AB$  tại  $I$ . Đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với  $AB$  cắt đường thẳng  $d$  tại  $C$  và  $D$  ( $D$  nằm trong góc  $BOM$ ).

- Chứng minh các tia  $OC, OD$  là các tia phân giác của các góc  $AOM, BOM$ .
- Chứng minh  $CA$  và  $DB$  vuông góc với  $AB$ .
- Chứng minh tam giác  $AMB$  và  $COD$  đồng dạng.
- Chứng minh hệ thức:  $AC.BD = R^2$ .

**Bài 31:** Cho đường tròn  $(O;R)$  đường kính  $AB$  và một điểm  $M$  bất kỳ trên đường tròn. Gọi các điểm chính giữa của các cung  $AM, MB$  lần lượt là  $H, I$ . Các dây  $AM$  và  $HI$  cắt nhau tại  $K$ .

- Chứng minh góc  $HKM$  có độ lớn không đổi.

- b) Hạ  $IP \perp AM$ . Chứng minh  $IP$  là tiếp tuyến của  $(O;R)$ .  
 c) Gọi  $Q$  là trung điểm của dây  $MB$ . Vẽ hình bình hành  $APQS$ . Chứng minh  $S$  thuộc đường tròn  $(O;R)$ .  
 d) Chứng minh khi  $M$  di động thì đường thẳng  $HI$  luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**Bài 32:** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  và hai điểm  $C, D$  thuộc nửa đường tròn sao cho cung  $AC < 90^\circ$  và góc  $COD$  bằng  $90^\circ$ . Gọi  $M$  là một điểm trên nửa đường tròn sao cho  $C$  là điểm chính giữa của cung  $AM$ . Các dây  $AM, BM$  cắt  $OC, OD$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ .

- a) Tứ giác  $OEMF$  là hình gì.  
 b) Chứng minh  $D$  là điểm chính giữa của cung  $MB$ .  
 c) Một đường thẳng  $d$  tiếp xúc với nửa đường tròn tại  $M$  và cắt các tia  $OC, OD$  lần lượt tại  $I$  và  $K$ . Chứng minh các tứ giác  $OBKM, OAIM$  nội tiếp.  
 d) Giả sử tia  $AM$  cắt tia  $BD$  tại  $S$ . Xác định vị trí của  $C$  và  $D$  sao cho 5 điểm  $M, O, B, K, S$  cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 33:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = AC$ , một cung tròn  $BC$  nằm bên trong tam giác  $ABC$  và tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $B, C$  sao cho  $A$  và tâm của cung  $BC$  nằm khác phía đối với  $BC$ . Trên cung  $BC$  lấy một điểm  $M$  rồi kẻ các đường vuông góc  $MI, MH, MK$  xuống các cạnh tương ứng  $BC, CA, AB$ . Gọi giao điểm của  $BM, IK$  là  $P$ ; giao điểm của  $CM, IH$  là  $Q$ . Chứng minh rằng

- a) Các tứ giác  $BIMK, CIMH$  nội tiếp được.  
 b)  $MI^2 = MH \cdot MK$   
 c) Tứ giác  $IPMQ$  nội tiếp và  $PQ \perp MI$   
 d) Nếu  $KI = KB$  thì  $IH =$

## VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ ĐỀ TOÁN LUYỆN THI

➤ **Đề thi thử số 1. Thời gian 120 phút**

### Câu I

Cho biểu thức  $P = \left( \frac{2a+1}{\sqrt[3]{a^3}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1} \right) \left( \frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$

- 1) Rút gọn  $P$   
 2) Xét dấu của biểu thức  $P\sqrt{1-a}$ .

### Câu II

Một ca nô xuôi từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc  $30\text{km/h}$ , sau đó lại ngược từ  $B$  về  $A$ . Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược  $1\text{h}20$  phút. Tính khoảng cách giữa hai bến  $A$  và  $B$  biết rằng vận tốc dòng nước là  $5\text{km/h}$  và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi và ngược là bằng nhau.

### Câu III

Cho tam giác ABC cân tại A với góc BAC nhọn. Một cung tròn BC nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AB, CA. Gọi P là giao điểm của MB, IK và Q là giao điểm của MC, IH.

- 1) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được.
- 2) Chứng minh tia đối của tia MI là phân giác của góc HMK.
- 3) Chứng minh tứ giác MPIQ nội tiếp và PQ song song với BC.
- 4) Gọi  $(O_2)$  là đường tròn đi qua M, P, K ;  $(O_1)$  là đường tròn đi qua M, Q, H ; N là giao điểm thứ hai của  $(O_1)$  và  $(O_2)$  và D là trung điểm của BC. Chứng minh M, N, D thẳng hàng.

### Câu IV

Tìm tất cả các cặp số  $(x, y)$  thoả mãn phương trình  $5x - 2\sqrt{x}(y+2) + y^2 + 1 = 0$ .

➤ **Đề thi thử số 2. Thời gian 120 phút**

### Câu I

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm a để  $A > 1/6$ .

### Câu II

Cho phương trình  $x^2 - 2(m+2)x + m+1 = 0$  với m là tham số.

- 1) Giải phương trình khi  $m = -3/2$ .
- 2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- 3) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để  $x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2$ .

### Câu III

Cho tam giác ABC ( $AB > AC, \angle BAC > 90^\circ$ ). Gọi I, K thứ tự là các trung điểm của AB và AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E, tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

- a) Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.
- b) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp.
- c) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.
- d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH, DE.

### Câu IV

Xét hai phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  và  $cx^2 + bx + a = 0$ . Tìm hệ thức giữa a, b, c là điều kiện cần và đủ để hai phương trình trên có một nghiệm chung duy nhất.

➤ **Đề thi thử số 3. Thời gian 120 phút**

**Câu I**

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$

- 1) Rút gọn A
- 2) Với GT nào của x thì A đạt GTNN và tìm GTNN đó.

**Câu II**

Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được 1/3 quãng đường AB người đó tăng vận tốc lên 10km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24phút.

**Câu III**

Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Lấy điểm M trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

- 1) Chứng minh góc AMD = góc ABC và MA là tia phân giác của góc BMD.
- 2) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
- 3) Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F, chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.
- 4) Chứng minh tích  $P = AE.AF$  không đổi khi M di động. Tính P theo bán kính R và  $ABC = \alpha$

**Câu IV**

Cho hai bất phương trình  $3mx - 2m > x + 1$  và  $m - 2x < 0$ . Tìm m để hai bất phương trình trên có cùng tập hợp nghiệm.

➤ **Đề thi thử số 4. Thời gian 120 phút**

**Câu I**

Cho biểu thức  $P = \left( \frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( 1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên dương.

**Câu II**

Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 96km trong thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa quãng đường người đó dừng lại nghỉ 18 phút. Do đó để đến B đúng hẹn người đó đã tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.



### Câu III

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F.

- 1) Chứng minh tứ giác AEHF là hình chữ nhật.
- 2) Chứng minh  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$
- 3) Đường thẳng qua A vuông góc với EF cắt cạnh BC tại I. CMR: I là trung điểm của BC.
- 4) Chứng minh nếu diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật AEHF thì tam giác ABC vuông cân.

➤ **Đề thi thử số 5. Thời gian 120 phút**

### Câu I

Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tìm x để  $P > 0$ .
- 3) Tìm m để  $P\sqrt{x} = m - \sqrt{x}$ .

### Câu II

Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ A đi đến B. Xe tải đi với vận tốc 40km/h, xe con đi với vận tốc 60km/h. Sau khi mỗi xe đi được nửa đường thì xe con nghỉ 40 phút rồi chạy tiếp đến B; xe tải trên quãng đường còn lại đã tăng vận tốc thêm 10km/h nhưng vẫn đến B chậm hơn xe con nửa giờ. Hãy tính quãng đường AB.

### Câu III

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn,  $AM < AN$ ). Gọi I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn (E là trung điểm của MN).

- 1) Chứng minh A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Chứng minh góc  $AOC =$  góc  $BIC$ .
- 3) Chứng minh BI song song với MN.
- 4) Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

➤ **Đề thi thử số 6. Thời gian 120 phút**

### Câu I

Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$ .

- 1) Rút gọn P
- 2) Tính P biết  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ .
- 3) Tìm các n để có x thỏa mãn  $P(\sqrt{x}+1) > \sqrt{x} + n$ .

## Câu II

Một ca nô chạy trên sông trong 8h, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, ca nô này chạy trong 4h, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

## Câu III

Cho đường tròn (O) đường kính  $AB = 2R$ , dây  $MN$  vuông góc với dây  $AB$  tại  $I$  sao cho  $IA$  nhỏ hơn  $IB$ . Trên đoạn  $MI$  lấy điểm  $E$  ( $E$  khác  $M$  và  $I$ ). Tia  $AE$  cắt đường tròn tại điểm thứ hai  $K$ .

- 1) Chứng minh tứ giác  $IEKB$  nội tiếp.
- 2) Chứng minh tam giác  $AME$ ,  $AKM$  đồng dạng và  $AM^2 = AE.AK$ .
- 3) Chứng minh  $AE.AK + BI.BA = 4R^2$ .
- 4) Xác định vị trí điểm  $I$  sao cho chu vi tam giác  $MIO$  đạt GTLN.

➤ **Đề thi thử số 7. Thời gian 120 phút**

## Câu I

Cho biểu thức  $P = \left( \sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-4}}{1-x} \right)$

- 1) Rút gọn  $P$
- 2) Tìm  $x$  để  $P < 0$
- 3) Tìm GTNN của  $P$ .

## Câu II

Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2h với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

## Câu III

Cho đường tròn (O) đường kính  $AB$  cố định và một đường kính  $EF$  bất kì ( $E$  khác  $A, B$ ). Tiếp tuyến tại  $B$  với đường tròn cắt các tia  $AE$ ,  $AF$  lần lượt tại  $H$ ,  $K$ . Từ  $K$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $EF$  cắt  $HK$  tại  $M$ .

- 1) Chứng minh tứ giác  $AEBF$  là hình chữ nhật.
- 2) Chứng minh tứ giác  $EFKH$  nội tiếp đường tròn.
- 3) Chứng minh  $AM$  là trung tuyến của tam giác  $AHK$ .
- 4) Gọi  $P$ ,  $Q$  là trung điểm tương ứng của  $HB$ ,  $BK$ . Xác định vị trí của đường kính  $EF$  để tứ giác  $EFQP$  có chu vi nhỏ nhất.

➤ **Đề thi thử số 8. Thời gian 120 phút**

## Câu I

Cho biểu thức  $P = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$



- 1) Rút gọn P
- 2) Tính P khi  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$ .
- 3) Tìm x thỏa mãn  $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$ .

### Câu II

Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6h. Sau 2h làm chung thì tổ hai bị điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10h. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

### Câu III

Cho đường tròn (O, R), đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN tới đường tròn (M, N thuộc O). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

- 1) Chứng minh C, O, H, N thuộc một đường tròn
- 2) Chứng minh  $KN.KC = KH.KO$
- 3) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I, chứng minh I cách đều CM, CN, MN.
- 4) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của điểm C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

➤ **Đề thi thử số 9. Thời gian 120 phút**

### Câu I

Cho biểu thức  $P = \left[ \frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} - \frac{a + \sqrt{a}}{a - 1} \right] : \left( \frac{1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right)$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tìm a để  $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a} + 1}{8} \geq 1$ .

### Câu II

Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B cách nhau 80km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách B 72km, thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian ca nô ngược dòng 15 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc của dòng nước là 4km/h.

### Câu III

Tìm tọa độ giao điểm A và B của đồ thị hai hàm số  $y = 2x + 3$  và  $y = x^2$ . Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác ABCD.

### Câu IV

Cho đường tròn (O) đường kính  $AB = 2R$ , C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

- 1) Chứng minh tứ giác BCHK nội tiếp.
- 2) Tính tích AH.AK theo R.
- 3) Xác định vị trí của điểm K để tổng KM + KN + KB đạt GTLN và tính GTLN đó.

#### Câu V

Cho hai số dương  $x, y$  thoả mãn điều kiện  $x + y = 2$ . Chứng minh  $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$ .

➤ **Đề thi thử số 10. Thời gian 120 phút**

#### Câu I

Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ .

- 1) Rút gọn P
- 2) Tính P khi  $x = 4$
- 3) Tìm x để  $P = \frac{13}{3}$ .

#### Câu II

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

#### Câu III

Cho Parabol (P):  $y = \frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx + 1$ .

- 1) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.
- 2) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB theo m.

#### Câu IV

Cho đường tròn (O) bán kính  $AB = 2R$  và E là điểm bất kỳ trên đường tròn đó (E khác A, B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K khác A.

- 1) Chứng minh hai tam giác KAF và KEA đồng dạng.
- 2) Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh đường tròn (I; IE) tiếp xúc (O) tại E và tiếp xúc AB tại F.
- 3) Gọi M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I; IE). Chứng minh MN song song với AB.
- 4) Gọi P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm GTNN của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên (O).

#### Câu V

Tìm GTNN của biểu thức  $A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2(x-3)^2$ .

➤ **Đề thi thử số 11. Thời gian 120 phút**

**Câu I**

Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tìm x để  $P < \frac{1}{2}$ .

**Câu II**

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

**Câu III**

Cho phương trình  $x^2 + bx + c = 0$

- 1) Giải phương trình khi  $b = -3, c = 2$ .
- 2) Tìm b, c để phương trình có hai nghiệm phân biệt và tích bằng 1.

**Câu IV**

Cho đường tròn (O; R) tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên đường thẳng d lấy điểm H (H khác A) và  $AH < R$ . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt E, B (E nằm giữa B và H).

- 1) Chứng minh góc  $ABE = \text{góc } EAH$  và  $\Delta ABH \sim \Delta EAH$
- 2) Lấy điểm C trên đường thẳng d sao cho H là trung điểm của AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh tứ giác AHEK nội tiếp.
- 3) Xác định vị trí của điểm H để  $AB = R\sqrt{3}$ .

**Câu V**

Cho đường thẳng  $y = (m-1)x + 2$ . Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng đó lớn nhất.

➤ **Đề thi thử số 12. Thời gian 120 phút**

**Câu I**

Cho  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}; x \geq 0, x \neq 9$ .

- 1) Rút gọn P.
- 2) Tìm giá trị của x để  $P = \frac{1}{3}$ .
- 3) Tìm GTLN của P.

**Câu II**

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.



**Câu III**

Cho Parabol (P):  $y = -x^2$  và đường thẳng (d)  $y = mx - 1$

- 1) Chứng minh với mọi m thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
- 2) Gọi  $x_1, x_2$  là các hoành độ giao điểm của (d) và (P). Tìm m để  $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 + 3$ .

**Câu IV**

Cho (O;R) đường kính  $AB = 2R$  và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại E, tia AC cắt BE tại F.

- 1) Chứng minh tứ giác FCDE nội tiếp
- 2) Chứng minh  $DA \cdot DE = DB \cdot DC$
- 3) Chứng minh  $CFD = OCB$ . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).
- 4) Cho biết  $DF = R$ , chứng minh  $\tan AFB = 2$ .

**Câu V**

Giải phương trình  $x^2 + 4x + 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7}$ .

**ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TỈNH NAM ĐỊNH NĂM 2012****Câu I (1,5 điểm)**

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

- 1) Rút gọn biểu thức A.
- 2) Chứng minh rằng  $A - 2 > 0$  với mọi x thỏa mãn điều kiện  $x > 0, x \neq 1$ .

**Câu II (1,5 điểm)**

- 1) Giải phương trình  $x^4 + x^2 - 6 = 0$ .
- 2) Tìm các giá trị của tham số m để hai đường thẳng  $y = (m^2 + 1)x + m + 2$  và  $y = 5x + 2$  song song với nhau.

**Câu III (1,0 điểm)**

Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = 1 \\ 3y - 1 = xy. \end{cases}$$

**Câu IV (3,0 điểm)**

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính  $AB = 2R$ . Vẽ các tia tiếp tuyến Ax, By (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Trên nửa đường tròn đã cho lấy điểm M không trùng với A và B, tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại E và F.

- 1) Chứng minh AEMO nội tiếp.
- 2) Chứng minh  $EO^2 = AE \cdot EF$ .

3) Kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB), K là giao điểm của EB và MH. Tính tỉ số  $\frac{MK}{MH}$ .

**Câu V** (1,0 điểm)

Giải phương trình  $\sqrt{2(x^4 + 4)} = 3x^2 - 10x + 6$ .

